УДК 519.8

С.О. Мащенко
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Украина
Украина, 0160, г. Киев, ул. Владимирская, 64, *msomail@yandex.ru*

Операции пересечения и объединения нечеткого множества нечетких множеств

S.O. Mashchenko
Taras Shevchenko National University of Kiyv, Ukraine
Ukraine, 0160*, c. Kiev, Vladimirskaia st., 64*

Operations of Intersection and Union of the Fuzzy Set of Fuzzy Sets

С.О. Мащенко
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна
Україна, 0160, м. Київ, вул. Володимирська, 64

Операції перетину та об'єднання нечіткої множини нечітких множин

В статье рассмотрены операции пересечения и объединения нечеткого множества нечетких множеств. Показано, что результатом этих операций являются нечеткие множества типа 2. Разработано конструктивное представление их функций принадлежности. Установлена взаимосвязь между операциями объединения и пересечения. Рассмотрены случаи объединения и пересечения нечеткого множества четких множеств. Построены функции принадлежности результирующих нечетких множеств типа 2, исследована их внутренняя структура.
Ключевые слова: нечеткое множество, нечеткое множество типа 2,
операции над множествами

The operations of intersection and union of fuzzy set of fuzzy sets are considered in the article. It is shown that type-2 fuzzy sets are the results of these operations. Structural presentation of their belonging functions is developed. Intercommunication between operations of union and intersection is set. The cases of union and intersection of fuzzy set of clear sets are considered. The belonging functions of resulting type-2 fuzzy sets are built, their underlying structure is explored.
Key Words: fuzzy set, type-2 fuzzy set, operations above sets

У статті розглянуті операції перетину та об'єднання нечіткої множини нечітких множин. Показано, що результатом цих операцій є нечітка множина типу 2. Розроблене конструктивне представлення їхніх функцій належності. Встановлений взаємозв'язок між операціями об'єднання і перетину. Розглянуті випадки об'єднання і перетину нечіткої множини чітких множин. Побудовані функції належності результуючих нечетких множин типу 2, досліджена їхня внутрішня структура.
Ключові слова: нечітка множина, нечітка множина типу 2, операції над множинами

Введение

Одной из тенденций развития современной теории принятия решений является широкое применение математического аппарата теории нечетких множеств. Среди классических постановок задач принятия решений (ЗПР) в условиях нечеткой информации следует отметить: задачу достижения нечетко поставленной цели при

нечетких ограничениях [1]; задачу нечеткого математического программирования (НМП) с нечетким множеством альтернатив [2]; задачу обобщенного НМП с целью, заданной нечетким отображением [2]; задачу со «смягченной» целевой функцией и (или) ограничениями [3], в которой вместо оптимизационной решается задача удовлетворения цели (при этом соответствующие неравенства для целевой функции и ограничений могут нарушаться); задачу математического программирования с нечеткими коэффициентами [3], задачу векторной оптимизации на нечетко заданном комбинаторном множестве альтернатив [4] и др. В указанных выше известных постановках задач НМП нечеткость проявляется как в описании целевой функции, так и в описании множества альтернатив. Известен ряд постановок задач принятия решений (ЗПР), в которых сама структура задачи носит нечеткий характер. Например, ЗПР с нечетким множеством целевых отношений предпочтения [5], ЗПР с нечетким множеством критериев [6] и ограничений, ЗПР в условиях неопределенности с нечетким множеством состояний природы [7].

Разработка методов решения задач такого типа приводит к необходимости использования множеств (отношений), которые могут быть представлены как пересечение или объединение нечеткого множества нечетких или четких соответственно множеств (отношений).

Целью данной работы является формализация операций пересечения и объединения нечеткого множества как нечетких, так и четких множеств, построение функций принадлежности результирующих множеств и изучение их основных свойств.

Пересечение нечеткого множества нечетких множеств

Пусть на некотором четком множестве X заданы нечеткие множества F_i, с функциями принадлежности $\varphi_i : X \to [0,1]$, $i \in N$, где $N = \{1,\dots,n\}$ – четкое множество их индексов, n – их количество.

Пусть $\tilde{N}$ – некоторое нечеткое подмножество N, которое задается функцией принадлежности $\eta : N \to [0,1]$. Определим понятие пересечения нечеткого множества $\tilde{N}$ нечетких множеств F_i, $i \in N$.

Сначала рассмотрим множество $F = \bigcap_{i\in N} F_i$, которое является пересечением четкого множества N нечетких множеств F_i, $i \in N$. В соответствии с классической теорией [2] оно представляет собой нечеткое множество, которое задается на X функцией принадлежности $\varphi(x) = \min_{i\in N} \varphi_i(x)$, $x \in X$. Нетрудно заметить, что значение функции принадлежности $\varphi(x)$ при каждом фиксированном значении $x \in X$ фактически определяется как значение целевой функции тривиальной задачи «четкого» математического программирования $\varphi = \min_{i\in N} \varphi_i$ (в этой записи для наглядности не указано фиксированное значение $x \in X$).

Рассмотрим теперь пересечение $\tilde{F}^{\cap} = \bigcap_{i\in \tilde{N}} F_i$ нечеткого множества $\tilde{N} \subseteq N$ нечетких множеств F_i, $i \in N$. Естественное обобщение классической операции пересечения четкого множества N нечетких множеств приводит к тому, что множество $\tilde{F}^{\cap}$ будет задаваться функцией принадлежности

$$y(x) = \min_{i\in \tilde{N}} \varphi_i(x), \; x \in X . \quad (1)$$

Вполне понятно, что значение функции принадлежности $y(x)$ для каждого фиксированного $x \in X$ будет определяться как значение целевой функции задачи нечеткого математического программирования:

$$y = \min_{i \in \tilde{N}} \varphi_i \tag{2}$$

(в этой записи, как и в предыдущем случае, также не указано фиксированное значение $x \in X$).

Задачи нечеткого математического программирования достаточно хорошо изучены. Согласно [2], решением задачи (2) называется нечеткое множество $\tilde{N}^*$, носителем которого будет множество оптимальных по Парето альтернатив (обозначим его $N^{\cap}$) двухкритериальной задачи дискретной оптимизации:

$$\varphi_i \to \min,\ \eta(i) \to \max,\ \ i \in N\ . \tag{3}$$

Функцией принадлежности $\tilde{\eta}$ нечеткого множества $\tilde{N}^*$ будет сужение функции принадлежности $\eta(i)$, $i \in N$, с множества N на множество $N^{\cap} \subseteq N$. Иными словами, эта функция принадлежности будет иметь вид:

$$\tilde{\eta}(i) = \begin{cases} \eta(i), & i \in N^{\cap}, \\ 0, & i \notin N^{\cap}. \end{cases}$$

Множеству решений задачи (2), которым является нечеткое множество $\tilde{N}^*$ с функцией принадлежности $\tilde{\eta}(i)$, $i \in N$, согласно [2] соответствует нечеткое множество $\Psi \subseteq [0,1]$ оптимальных значений целевой функции этой задачи с функцией принадлежности $\psi : \{0,1\} \to [0,1]$, $\psi(y) = \max_{\varphi_i = y} \tilde{\eta}(i)$, $y \in \{0,1\}$.

Следует отметить, что универсальным множеством нечеткого множества Ψ оптимальных значений целевой функции задачи (2) можно считать также и $\bigcup_{i \in N} \varphi_i(X)$ объединение образов множества X при отображениях $\varphi_i : X \to [0,1]$, $i \in N$, которое будет подмножеством $[0,1]$. В частности, если множества F_i, $i \in N$, – четкие, то универсальное множество нечеткого множества Ψ оптимальных значений целевой функции задачи (2) будет состоять всего из двух элементов $y = 0$ и $y = 1$. Это объясняется тем, что переменная y может принимать значения, равные только $\varphi_i(x)$, $i \in N$, которые, в свою очередь, при любом фиксированном значении $x \in X$ могут быть равны или 0, или 1.

Таким образом, для каждого фиксированного $x \in X$ значения $y(x)$ функции принадлежности (1) нечеткого множества $\tilde{F}^{\cap} = \bigcap_{i \in \tilde{N}} F_i$ образуют также нечеткое подмножество Ψ универсального множества $Y = [0,1]$. Отсюда следует, что множество $\tilde{F}$ представляет собой так называемое [8] нечеткое множество типа 2.

Теперь можно формализовать понятие пересечения $\tilde{F}^{\cap} = \bigcap_{i \in \tilde{N}} F_i$ нечеткого множества $\tilde{N}$ нечетких множеств N_i, $i \in N$.

Для произвольного $x \in X$ рассмотрим отношение доминирования, которое порождается целевыми функциями задачи (3) на множестве N.

Будем говорить, что элемент $i \in N$ доминирует элемент $j \in N$ по убыванию функции φ и по возрастанию функции η для $x \in X$ и обозначать это отношение $iS_x j$, если справедливы такие неравенства: $\varphi_i(x) \le \varphi_j(x)$, $\eta(i) \ge \eta(j)$, и хотя бы одно из них строгое.

Это понятие позволяет определить множество оптимальных по Парето решений двухкритериальной задачи (3), которое будет носителем нечеткого множества решений задачи (2). Для $x \in X$ обозначим носитель

$$N^{\cap}(x) = \{i \in N \mid j\bar{S}_x i,\ \forall j \in N\}. \tag{4}$$

Для произвольных $x \in X$, $i \in N$, определим функцию принадлежности нечеткого множества решений задачи (1):

$$\eta^{\cap}(x,i) = \begin{cases} \eta(i), & i \in N^{\cap}(x), \\ 0, & i \notin N^{\cap}(x). \end{cases} \tag{5}$$

Пересечением нечеткого множества $\tilde{N}$ нечетких множеств F_i, $i \in N$, будем называть $\tilde{F}^{\cap} = \bigcap_{i \in \tilde{N}} F_i$ – нечеткое множество типа 2, которое задается тройками $(x, \tilde{\psi}^{\cap}(x,y))$, где

$\tilde{\psi}^{\cap} : X \times Y \to [0,1]$ — нечеткое отображение, выполняющее роль нечеткой функции принадлежности и определенное таким образом:

$$\tilde{\psi}^{\cap}(x,y) = \begin{cases} \max\limits_{i \in N}\{\eta^{\cap}(x,i) \mid \varphi_i(x) = y\}, & \exists i \in N:\ \varphi_i(x) = y; \\ 0, & \varphi_i(x) \ne y,\ \ \forall i \in N; \end{cases} \tag{6}$$

x – элемент множества X;

y – элемент универсального множества $Y = [0,1]$ значений отображения принадлежности $\tilde{\psi}^{\cap}(x,y)$ нечеткого множества $\tilde{F}$ типа 2.

Значения нечеткого отображения принадлежности $\tilde{\psi}^{\cap}(x,y)$ для фиксированного $x^0 \in X$ образуют нечеткое подмножество $\Psi_Y(x^0)$ множества $Y = [0,1]$ с функцией принадлежности $\tilde{\psi}^{\cap}(x^0,y)$, $y \in [0,1]$.

С другой стороны, если в отображении $\tilde{\psi}^{\cap}(x,y)$ зафиксировать $y \in Y$, то мы получим нечеткое множество элементов $x \in X$, принадлежащих множеству $\tilde{F}$, с функцией принадлежности $\tilde{\psi}^{\cap}(x,y)$.

Вычисление функции принадлежности $\tilde{\psi}^{\cap}(x,y)$ по формулам (4) – (6) можно упростить, если использовать следующую теорему.

Теорема 1. Пусть F_i, $i \in N$, – некоторые нечеткие подмножества *X*, которые задаются функциями принадлежности $\varphi_i(x)$, $i \in N$; $\tilde{N}$ – нечеткое подмножество N с функцией принадлежности $\eta(i)$, $i \in N$. Тогда функция принадлежности нечеткого множества $\tilde{F}^{\cap} = \bigcap_{i \in \tilde{N}} F_i$ типа 2 задается такой формулой:

$$\psi^{\cap}(x,y) = \begin{cases} \max\limits_{i \in N^{\cap}(x,y)} \eta(i), & N^{\cap}(x,y) \ne \varnothing, \\ 0, & N^{\cap}(x,y) \ne \varnothing. \end{cases} \tag{7}$$

где

$$N^{\cap}(x,y)=\{i\in N\,|\,\varphi_i(x)=y,\ y=\min_{j\in N}\{\varphi_j(x)\big|\eta(j)\geq\eta(i)\},$$

$$\eta(i)=\max_{j\in N}\{\eta(j)\big|\varphi_j(x)\leq y\}\},\ x\in X\ ,\ y\in[0,1]\,. \qquad (8)$$

Доказательство. Для доказательства теоремы необходимо показать, что

$$\psi^{\cap}(x,y)=\tilde{\psi}^{\cap}(x,y) \text{ для } \forall x,y\in X\ .$$

Предположим, что для некоторых $x\in X$, $y\in[0,1]$ множество $N^{\cap}(x,y)=\varnothing$. Тогда согласно с (7) $\psi^{\cap}(x,y)=0$, а согласно с (8) для $\forall i\in N$ должно выполняться хотя бы одно из следующих условий:

$$\varphi_i(x)\neq y\,, \qquad (9)$$

$$\exists j\in N:\varphi_i(x)>\varphi_j(x),\ \eta(j)\geq\eta(i)\,, \qquad (10)$$

$$\exists j\in N:\eta(i)<\eta(j),\ \varphi_j(x)\leq\varphi_i(x)\,. \qquad (11)$$

Если выполняется условие (9), то из (6) получим $\tilde{\psi}^{\cap}(x,y)=0$. Если выполняется условие (10) или (11), то $jS_x i$. Тогда согласно с (4) $i\notin N^{\cap}(x)$. Отсюда согласно с (5) $\eta^{\cap}(x,i)=0$. Поэтому из (6) получим также $\tilde{\psi}^{\cap}(x,y)=0$. Таким образом, $\psi^{\cap}(x,y)=\tilde{\psi}^{\cap}(x,y)=0$.

Предположим, что для некоторых $x\in X$, $y\in[0,1]$ множество $N^{\cap}(x,y)\neq\varnothing$. Отсюда согласно с (7) получим $\psi^{\cap}(x,y)=\max\limits_{i\in N^{\cap}(x,y)}\eta(i)$. Обозначим $i^*=\arg\max\limits_{i\in N^{\cap}(x,y)}\eta(i)$.

Тогда из (8) следует, что:

$$\varphi_{i^*}(x)=y\ ,\ j\bar{S}_x i^*,\ \forall j\in N\ . \qquad (12)$$

Поэтому согласно (4) $i^*\in N^{\cap}(x)\neq\varnothing$, $\eta^{\cap}(x,i^*)=\eta(i^*)$. Отсюда $\tilde{\psi}^{\cap}(x,y)\geq\eta(i^*)$.

Покажем, что $\tilde{\psi}^{\cap}(x,y)=\eta(i^*)$. Допустим противное, что $\tilde{\psi}^{\cap}(x,y)>\eta(i^*)$. Обозначим $j^*=\arg\max\limits_{i\in N}\{\eta^{\cap}(x,i)\,|\,\varphi_i(x)=y\}$. Тогда, $\eta(j^*)>\eta(i^*)$, $\varphi_{j^*}(x)=y$ и согласно с (5) $j^*\in N^{\cap}(x)$. Поскольку согласно с (12) $\varphi_{i^*}(x)=y$, то $\varphi_{i^*}(x)=\varphi_{j^*}(x)$. Поэтому $j^*\bar{S}_x i^*$. Отсюда $j^*\notin N^{\cap}(x)$. Получили противоречие. Таким образом, $\tilde{\psi}^{\cap}(x,y)=\eta(i^*)=\psi^{\cap}(x,y)$. Теорема доказана.

Для иллюстрации пересечения нечеткого множества нечетких множеств рассмотрим такой пример.

Пример 1. Пусть множество X состоит из четырех элементов: a, b, c, d. На множестве X заданы два нечетких множества F_1, F_2 с функциями принадлежности, соответственно $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, значения которых указаны в табл.1. Пусть также задано нечеткое подмножество $\tilde{N}$ множества $N=\{1,2\}$ с функцией принадлежности $\eta(i)$, $i\in N$, которая имеет значения: $\eta(1)=0.5$, $\eta(2)=0.8$. Найдем пересечение $\tilde{F}^{\cap}=\bigcap\limits_{i\in\tilde{N}}F_i$ нечеткого множества $\tilde{N}$ нечетких множеств F_1, F_2 .

В табл. 1 указаны множества $N^{\cap}(x)$, $x\in X$, и функция принадлежности $\eta^{\cap}(x,i)$, $x\in X$, $i\in N$. Значения функции принадлежности $\tilde{\psi}^{\cap}(x,y)$ нечеткого множества $\tilde{F}^{\cap}$ типа 2 указаны в табл. 2.

Таблица 1 – Функции и множества

x	a	b	c	d
$\varphi_1(x)$	0	0,5	0,3	0
$\varphi_2(x)$	0	0,3	1	0
$N^{\cap}(x)$	{2}	{2}	{1,2}	{2}
$\eta^{\cap}(x,1)$	0	0	0,5	0
$\eta^{\cap}(x,2)$	0,8	0,8	0,8	0,8

Таблица 2 – Функция принадлежности $\tilde{\psi}^{\cap}(x,y)$

y	x			
	a	b	c	d
0	0,8	0	0	0,8
0,3	0	0,8	0,5	0
0,5	0	0	0	0
1	0	0	0,8	0

Следует отметить, что в табл. 2 записаны лишь те значения переменной $y \in [0,1]$, которые отвечают не нулевым значением функции принадлежности.

Для иллюстрации теоремы 1 построим по (8) множества $N^{\cap}(x,y)$ (табл.3).

Таблица 3 – Множества $N^{\cap}(x,y)$

y	x			
	a	b	c	d
0	{2}	∅	∅	{2}
0,3	∅	{2}	{1}	∅
0,5	∅	∅	∅	∅
1	∅	∅	{2}	∅

Нетрудно убедиться, что рассчитанные по формулам (7) значения функции принадлежности $\tilde{\psi}^{\cap}(x,y)$ нечеткого множества $\tilde{F}^{\cap}$ типа 2 совпадут со значениями, приведенными в табл. 2.

Пересечение нечеткого множества четких множеств

Важным частным случаем рассматриваемой операции является пересечение нечеткого множества четких множеств. С одной стороны, этот случай часто встречается в прикладных задачах принятия решений [6], [7], с другой стороны, позволяет существенно упростить построение функции принадлежности $\psi(x,y)$.

Теорема 2. Пусть F_i, $i \in N$, – четкие множества, которые заданы на множестве X соответствующими характеристическими функциями:

$$\varphi_i(x) = 1 \Leftrightarrow x \in F_i,\ \varphi_i(x) = 0_i \Leftrightarrow x \notin F_i,\ x \in X,\ i \in N;$$

$\eta(i)$ - функция принадлежности нечеткого множества $\tilde{N}$. Для того чтобы нечеткое множество $\tilde{F}^{\cap}$ типа 2, которое задано нечетким отображением принадлежности

$\psi^{\cap}(x,y)$, $x\in X$, $y\in Y=\{0,1\}$, было пересечением нечеткого множества $\tilde{N}$ четких множеств F_i, $i\in N$, т.е. $\tilde{F}^{\cap}=\bigcap_{i\in\tilde{N}}F_i$ необходимо и достаточно, что б для $x\in X$:

$$\psi^{\cap}(x,0)=\begin{cases}\max\limits_{\varphi_i(x)=0}\eta(i), & \exists i\in N:\ \varphi_i(x)=0,\\ 0, & \varphi_i(x)=1,\ \ \forall i\in N,\end{cases}$$
$$\psi^{\cap}(x,1)=\begin{cases}\max\limits_{i\in N}\eta(i), & \varphi_i(x)=1,\ \ \forall i\in Arg\max\limits_{j\in N}\eta(j),\\ 0, & \exists i\in Arg\max\limits_{j\in N}\eta(j):\ \varphi_i(x)=0.\end{cases} \quad (13)$$

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что функция принадлежности $\psi(x,y)$ нечеткого множества $\tilde{F}$ типа 2 определяется по формуле (7). Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать эквивалентность формул (7) и (13).

Сначала рассмотрим (13) и (7) при $y=0$ в двух возможных случаях. Пусть $\varphi_i(x)=1,\forall i\in N$. Тогда согласно (13) $\psi^{\cap}(x,0)=0$. С другой стороны, из (8) следует, что $N^{\cap}(x,0)=\varnothing$. Поэтому согласно (14) получим $\psi^{\cap}(x,0)=0$.

Во втором случае, пусть $\exists i\in N:\varphi_i(x)=0$. Определим согласно (7) значение $\psi^{\cap}(x,0)$. Для этого в соответствии с (8) построим множество

$$N^{\cap}(x,0)=\{i\in N\,\big|\ 0=\varphi_i(x)=\min_{\eta(j)\ge\eta(i)}\varphi_j(x),\mu(i)=\max_{\varphi_j(x)=0}\eta(j)\}.$$

Покажем, что $N^{\cap}(x,0)=\mathrm{Arg}\max\limits_{\varphi_j(x)=0}\eta(j)$. Обозначим функцию $\eta_0^*(x)=\max\limits_{\varphi_j(x)=0}\eta(j)$. Пусть $i\in\mathrm{Arg}\max\limits_{\varphi_j(x)=0}\eta(j)$, тогда $\eta(i)=\eta_0^*(x)$ и будут иметь место равенства

$$\min_{\eta(j)\ge\eta(i)}\varphi_j(x)=\min\{\min_{\eta(j)=\eta_0^*(x)}\varphi_j(x),\ \min_{\eta(j)>\eta_0^*(x)}\varphi_j(x)\}=\min\{0,\ \min_{\eta(j)>\eta_0^*(x)}\varphi_j(x)\}=0=\varphi_i(x).$$

Отсюда очевидно следует, что $i\in N^{\cap}(x,0)$.

Теперь наоборот, пусть $i\in N^{\cap}(x,0)$. Тогда $0=\varphi_i(x)=\min\limits_{\eta(j)\ge\eta(i)}\varphi_j(x)$ и $\mu(i)=\mu_0^*(x)$. Отсюда $i\in\mathrm{Arg}\max\limits_{\varphi_j(x)=0}\eta(j)$, тогда согласно (13) $\psi^{\cap}(x,0)=\eta_0^*$. Таким образом, формулы (7) и (13) будут эквивалентны при $y=0$.

Далее сравним (7) и (13) при $y=1$ в двух возможных случаях. Обозначим $\eta_1^*=\max\limits_{j\in N}\eta(j)$, $I^*=\mathrm{Arg}\max\limits_{j\in N}\eta(j)$. Сначала пусть $\varphi_i(x)=1$, $\forall i\in I^*$. Тогда согласно (13) $\psi(x,1)=\eta_1^*$. Определим значение $\psi^{\cap}(x,1)$ согласно с формулой (7). Для этого построим в соответствии с формулой (8) множество индексов: $N^{\cap}(x,1)=\{i\in N\,\big|\ 1=\varphi_i(x)=\min\limits_{\eta(j)\ge\eta(i)}\varphi_j(x)\}$ $=\{i\in I^*\,\big|\ 1=\varphi_i(x)=\min\limits_{j\in I^*}\varphi_j(x)\}=I^*$. Отсюда согласно (13) $\psi^{\cap}(x,1)=\eta_1^*$. Таким образом, в этом случае значения (7) и (13) при $y=1$ совпадают.

Рассмотрим второй случай. Пусть $\exists i\in I^*:\varphi_i(x)=0$. Тогда согласно (13) $\psi^{\cap}(x,1)=0$. Определим значение $\psi^{\cap}(x,1)$ согласно (7). На основании (8) имеем $N^{\cap}(x,1)=\{i\in N\,\big|\ 1=\varphi_i(x)=$ $\min\limits_{\eta(j)\ge\eta(i)}\varphi_j(x),\ \eta(i)=\max\limits_{j\in M}\eta(j)=\eta_1^*\}=\{i\in I^*\,\big|\ 1=\varphi_i(x)=\ \ =\min\limits_{j\in I^*}\varphi_j(x)=0\}=\varnothing$. Отсюда согласно (7) $\psi^{\cap}(x,1)=0$, а поэтому формулы (7), (13) – эквивалентны при $y=1$. Теорема доказана.

Пример 2. Пусть множество $X=\{a,b,c,d\}$. На нем заданы два четких множества F_1, F_2 с функциями принадлежности, соответственно $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ (табл. 4). Функция принадлежности $\varphi(x)=\min\{\varphi_1(x),\varphi_2(x)\}$ их пересечения указана в третьей строке табл. 4. Пусть также задано нечеткое подмножество $\tilde{N}$ множества $N=\{1,2\}$ с функцией принадлежности $\eta(i)$, $i\in N$, которая имеет значения: $\eta(1)=0.7$, $\eta(2)=0.4$. Значения функции принадлежности $\tilde{\psi}^{\cap}(x,0)$ и $\tilde{\psi}^{\cap}(x,1)$ нечеткого множества $\tilde{F}^{\cap}=\bigcap_{i\in\tilde{N}} F_i$ типа 2 указаны в табл. 4.

Таблица 4 – Пересечение нечеткого множества четких множеств

x	a	b	c	d
$\varphi_1(x)$	0	1	0	1
$\varphi_2(x)$	0	0	1	1
$\varphi=\min\{\varphi_1,\varphi_2\}$	0	0	0	1
$\tilde{\psi}^{\cap}(x,0)$	0,7	0,4	0,7	0
$\tilde{\psi}^{\cap}(x,1)$	0	0,7	0	0,7

Следует отметить, что если в функции принадлежности $\psi^{\cap}(x,y)$ нечеткого множества $\tilde{F}^{\cap}$ типа 2 зафиксировать $y=1$, то мы получим нечеткое подмножество элементов $x\in X$, принадлежащих множеству $\tilde{F}^{\cap}$, с функцией принадлежности $\psi^{\cap}(x,1)$. Обозначим это множество $\Psi_X(1)$. Аналогично для фиксированного значения $y=0$ получим нечеткое множество элементов $x\in X$, не принадлежащих множеству $\tilde{F}^{\cap}$, с функцией принадлежности $\psi^{\cap}(x,0)$. Обозначим его $\Psi_X(0)$. Интересно, что в общем случае $\Psi_X(0)\neq\overline{\Psi_X(1)}$, и, соответственно, $\psi^{\cap}(x,0)\neq 1-\psi^{\cap}(x,1)$. Поэтому, как нечеткое множество $\Psi_X(0)$, так и $\Psi_X(1)$, представляют собой нечеткие множества сечений соответственно при $y=0$ и $y=1$ нечеткого множества $\tilde{F}^{\cap}$ типа 2 и являются его составляющими.

Хотя в общем случае множества $\Psi_X(0)$ и $\Psi_X(1)$ не дополняют друг друга, но, при определенных условиях, между ними можно установить следующую связь.

Теорема 3. Пусть функция принадлежности $\eta(j)$ нечеткого множества $\tilde{N}$ является нормальной, т.е. $\max_{j\in N}\eta(j)=1$. Тогда $1-\psi^{\cap}(x,0)\leq\psi^{\cap}(x,1)$ и поэтому $\overline{\Psi_X(0)}\subseteq\Psi_X(1)$.

Доказательство. Рассмотрим три возможных случая.

1. Предположим $\varphi_i(x)=1$, $\forall i\in N$. Тогда из (13) следует $\psi^{\cap}(x,0)=0$, $\psi^{\cap}(x,1)=1$. Отсюда $1=1-\psi^{\cap}(x,0)\leq\psi^{\cap}(x,1)=\max_{j\in N}\eta(j)=1$.

2. Предположим $\varphi_i(x)=1$, $\forall i\in Arg\max_{j\in N}\eta(j)$ и $\exists j\notin Arg\max_{j\in N}\eta(j)$: $\varphi_i(x)=0$. Обозначим $\max_{\varphi_j(x)=0}\{\eta(j)\,|\,j\in N,\, j\notin \mathrm{Arg}\max_{j\in N}\eta(j),\varphi_j(x)=0\}=\delta$. Отметим, что $0\leq\delta<1$.

Тогда из (13) следует $\psi^{\cap}(x,0)=\delta$, $\psi^{\cap}(x,1)=1$. Отсюда очевидно, что $1-\psi^{\cap}(x,0)\le\psi^{\cap}(x,1)$.

3. Предположим $\exists i\in Arg\max_{j\in N}\eta(j)$: $\varphi_i(x)=0$. Тогда из (13) следует $\psi^{\cap}(x,0)=1$, $\psi^{\cap}(x,1)=0$. Отсюда $1-\psi^{\cap}(x,0)=0\le 0=\psi^{\cap}(x,1)$.

Таким образом, $1-\psi^{\cap}(x,0)\le\psi^{\cap}(x,1)$ для $\forall x\in X$. Теорема доказана.

Объединение нечеткого множества множеств

Определим понятие $\tilde{F}^{\cup}=\bigcup_{i\in\tilde{N}}F_i$ - объединения нечеткого множества $\tilde{N}$ нечетких множеств F_i, $i\in N$.

Будем говорить, что элемент $i\in N$ доминирует элемент $j\in N$ по возрастанию функций φ и η, для $x\in X$ и обозначать это отношение $iP_x j$, если справедливы такие неравенства: $\varphi_i(x)\ge\varphi_j(x)$, $\eta(i)\ge\eta(j)$, и хотя бы одно из них строгое.

Это понятие позволяет определить для $\forall x\in X$ множество

$$N^{\cup}(x)=\{i\in N \mid j\overline{P}_x i,\ \forall j\in N\}, \qquad (14)$$

оптимальных по Парето решений двухкритериальной задачи:

$$\varphi_i(x)\to\max,\ \eta(i)\to\max,\ \ i\in N, \qquad (15)$$

которое будет носителем нечеткого множества решений задачи нечеткого математического программирования:

$$y(x)=\max_{i\in\tilde{N}}\varphi_i(x),\ x\in X. \qquad (16)$$

Для произвольных $x\in X$, $i\in N$ функция принадлежности нечеткого множества решений задачи (16) будет иметь вид:

$$\eta^{\cup}(x,i)=\begin{cases}\eta(i), & i\in N^{\cup}(x),\\ 0, & i\notin N^{\cup}(x).\end{cases} \qquad (17)$$

Объединением нечеткого множества $\tilde{N}$ нечетких множеств F_i, $i\in N$, будем называть $\tilde{F}^{\cup}=\bigcup_{i\in\tilde{N}}F_i$ – нечеткое множество типа 2, которое задается тройками $(x,\psi^{\cup}(x,z))$, где

$\psi^{\cup}: X\times Z\to[0,1]$ – нечеткое отображение, выполняющее роль нечеткой функции принадлежности и определенное таким образом:

$$\psi^{\cup}(x,z)=\begin{cases}\max_{i\in N}\{\eta^{\cup}(x,i)\mid\varphi_i(x)=z\}, & \exists i\in N:\ \varphi_i(x)=z;\\ 0, & \varphi_i(x)\ne z,\ \ \forall i\in N;\end{cases}$$

x – элемент множества X;

z – элемент универсального множества $Z=[0,1]$ значений отображения принадлежности $\psi^{\cup}(x,z)$ нечеткого множества $\tilde{F}^{\cup}$ типа 2.

Оказывается, что взаимосвязь операций объединения и пересечения нечеткого и четкого множества нечетких множеств – аналогична.

Лемма. Справедливо такое равенство $\bigcup_{i\in\tilde N} F_i = \overline{\bigcap_{i\in\tilde N} \overline{F}_i}$.

Доказательство. Обозначим множество $D_i = \overline{F}_i$. Тогда его функция принадлежности $d_i(x) = 1 - \varphi_i(x)$, $x \in X$. Отсюда очевидно, что для $\forall x \in X$ множество $N^{\cap}(x) = \{i \in N \mid j\overline{S}_x i,\ \forall j \in N\}$, оптимальных по Парето решений двухкритериальной задачи: $d_i(x) \to \min$, $\eta(i) \to \max$, $i \in N$, совпадет с множеством $N^{\cup}(x)=\{i\in N \mid j\overline{P}_x i,\ \forall j\in N\}$ оптимальных по Парето решений двухкритериальной задачи (15). Поэтому согласно (5) и (17) для произвольных $x \in X$, $i \in N$, также будут равны и функции принадлежности $\eta^{\cap}(x,i)$, $\eta^{\cup}(x,i)$. Отсюда согласно с (6) функция принадлежности нечеткого множества $\bigcap_{i\in\tilde N} D_i = \bigcap_{i\in\tilde N} \overline{F}_i$ типа 2 примет вид:

$$\delta^{\cap}(x,y) = \begin{cases} \max\limits_{i\in N}\{\eta^{\cup}(x,i) \mid 1-\varphi_i(x) = y\}, & \exists i \in N : 1-\varphi_i(x) = y; \\ 0, & 1-\varphi_i(x) \neq y,\ \forall i \in N. \end{cases}$$

Тогда в соответствии с операциями над нечеткими множествами типа 2 [8] дополнение $\overline{\bigcap_{i\in\tilde N} \overline{F}_i}$ к этому множеству будет иметь функцию принадлежности $\delta^{\cap}(x,1-y)$. Приняв $z = 1-y$, получим $\psi^{\cup}(x,z) = \delta^{\cap}(x,1-y)$. Лемма доказана.

Из теорем 1 – 3 и леммы получим следующие следствия.

Следствие 1. Пусть F_i, $i \in N$, – некоторые нечеткие подмножества *X*, которые задаются функциями принадлежности $\varphi_i(x)$, $i \in N$; $\tilde N$ – нечеткое подмножество N с функцией принадлежности $\eta(i)$, $i \in N$. Тогда функция принадлежности нечеткого множества $\tilde F^{\cup} = \bigcup_{i\in\tilde N} F_i$ типа 2 задается такой формулой:

$$\psi^{\cup}(x,z) = \begin{cases} \max\limits_{i\in N^{\cup}(x,y)} \eta(i), & N^{\cup}(x,z) \neq \varnothing, \\ 0, & N^{\cup}(x,z) \neq \varnothing. \end{cases}$$

где

$$N^{\cup}(x,z) = \{i \in N \mid \varphi_i(x) = z,\ z = \max_{j\in N}\{\varphi_j(x) \big| \eta(j) \geq \eta(i)\}\},$$

$$\eta(i) = \max_{j\in N}\{\eta(j) \big| \varphi_j(x) \geq z\}\},\ x \in X,\ z \in [0,1].$$

Следствие 2. Пусть F_i, $i \in N$, – четкие множества, которые заданы на множестве X соответствующими характеристическими функциями

$$\varphi_i(x) = 1 \Leftrightarrow x \in F_i,\ \varphi_i(x) = 0_i \Leftrightarrow x \notin F_i,\ x \in X,\ i \in N;$$

$\eta(i)$, $i \in N$, – функция принадлежности нечеткого множества $\tilde N$. Для того чтобы нечеткое множество $\tilde F^{\cup}$ типа 2, которое задано нечетким отображением принадлежности $\psi^{\cup}(x,z)$, $x \in X$, $z \in Z = \{0,1\}$, было пересечением нечеткого множества $\tilde N$ четких множеств F_i, $i \in N$, т.е. $\tilde F^{\cup} = \bigcup_{i\in\tilde N} F_i$ необходимо и достаточно, чтоб для $x \in X$:

$$\psi^{\cup}(x,1)=\begin{cases}\max\limits_{\varphi_i(x)=1}\eta(i), & \exists i\in N:\ \varphi_i(x)=1,\\ 0, & \varphi_i(x)=0,\quad \forall i\in N,\end{cases}$$

$$\psi^{\cup}(x,0)=\begin{cases}\max\limits_{i\in N}\eta(i), & \varphi_i(x)=0,\quad \forall i\in Arg\max\limits_{j\in N}\eta(j),\\ 0, & \exists i\in Arg\max\limits_{j\in N}\eta(j):\ \varphi_i(x)=1.\end{cases}$$

Взаимосвязь множеств уровней результирующего нечеткого множества типа 2 устанавливает следствие из теоремы 3 и леммы.

Следствие 3. Пусть функция принадлежности $\eta(j)$ нечеткого множества $\tilde{N}$ является нормальной, т.е. $\max\limits_{j\in N}\eta(j)=1$. Тогда $1-\psi^{\cap}(x,0)\le\psi^{\cap}(x,1)$ и поэтому $\overline{\Psi_X(0)}\subseteq\Psi_X(1)$.

Выводы

В заключении следует отметить, что рассмотренные выше операции пересечения и объединения нечеткого множества как четких, так и нечетких множеств приводят к получению такого достаточно сложного математического объекта, как нечеткое множество типа 2. В случае реализации указанных операций над четкими множествами удается получить функцию принадлежности результирующего нечеткого множества типа 2 в достаточно простом виде. Кроме этого установлено отношение включения для множеств уровней результирующего нечеткого множества типа 2, которое дает возможность его аппроксимации обычным нечетким множеством (типа 1).

Разработанные операции могут широко использоваться в теории нечетких множеств и различных прикладных исследованиях.

Литература

1. Bellman R. Decision making in a fuzzy environment / R. Bellman, L.A. Zadeh // Management science. – 1970. – Vol. 17. – P. 141-162.
2. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации / С.А. Орловский. – М. : Наука, 1981. – 208 с.
3. Зайченко Ю.П. Исследование операций: Нечеткая оптимизация / Ю.П. Зайченко – К.: Вища школа, 1991. – 191 с.
4. Семенова Н.В. Векторные задачи оптимизации с линейными критериями на нечетко заданном комбинаторном множестве альтернатив / Н.В. Семенова, Л.Н. Колечкина, А.Н. Нагорная // Кибернетика и системный анализ. – 2011. – № 2 . – С. 77-87.
5. Мащенко С.О. Прийняття рішень за нечіткою множиною відношень переваги / С.О. Мащенко, О.М. Бовсунівський // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2011. – № 2 . – С. 131-136.
6. Мащенко С.О. Задача багатокритеріальної оптимізації з нечіткою множиною критеріїв / С.О. Мащенко, О.М. Бовсунівський // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2012. – № 1 . – С. 75-81.
7. Мащенко С.О. Обобщенная задача принятия решений в условиях неопределенности с нечетким множеством состояний природы / С.О. Мащенко // Искусственный интеллект. – 2012. – № 1 . – С. 169 - 177.
8. Zadeh L.A. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes // L.A. Zadeh / IEEE Transactions System. Man Cybernetics. SMC-3. – 1973. – № 1. – P. 28-44.

Literatura

1. Bellman R. Management science. 1970. Vol. 17. P. 141-162.
2. Orlovskiy S.A. Problemy prinjatja reshenij pri nechetkoj ishodnoj informacii. M. : Nauka. 1981. 208 s.
3. Zajchenko Yu.P. Issledovanie operacij. Nechetkaja optimizacija. K. : Vysshcha shkola. Operations 1991. 191 s.

4. Semenova N.V. Kibernetika i sistemnyj analiz. 2011. № 2. S. 77-87.
5. Mashchenko S.O. Visnyk Kyivskogo universytetu. Serija : fiz.-mat. nauky 2011 № 2. S. 131-136.
6. Mashchenko S.O. Visnyk Kyivskogo universytetu. Serija : fiz.-mat. nauky 2012 № 1. S. 75-81.
7. Mashchenko S.O. Isskusstvennuj intellekt. 2012. № 1. S. 169-177.
8. Zadeh L.A. IEEE Transactions System. Man Cybernetics. SMC-3. 1973. № 1. P. 28-44.

S.O. Mashchenko

Operations of Intersection and Union of the Fuzzy Set of Fuzzy Sets

A necessity in formalization and study of intersection and union operations of fuzzy set of fuzzy sets arose up at development of methods of solving of decision making problems with a “fuzzy structure”. The decision making problem with the fuzzy set of purposes, which can be set by both purpose sets, and relations of preference, in particular, by criterion functions. To them behave similarly decision making problem with the fuzzy set of limitations, decision making problem in the conditions of uncertainty with the fuzzy set of nature states and etc.

Operations of intersection and union of fuzzy set of fuzzy sets are generalization of proper classic operations. It is shown, that by the result of these operations, there is the type-2 fuzzy set (the fuzzy set belonging function of which can have the fuzzy set of values). Description of type-2 fuzzy set is offered by the fuzzy reflection. Structural presentation of belonging functions of intersection and union of fuzzy set of fuzzy sets is developed. It is shown, that intercommunication of intersection and union operations of fuzzy and clear set of fuzzy sets is similar. The examples of realization of intersection operation are considered.

Special interest is been operations of intersection and union of fuzzy set of clear sets. Type-2 fuzzy sets are their results similarly special kinds. Belonging functions of these sets have fuzzy sets of values which are subsets of two-element set {0,1}. In work structural presentation of belonging functions of intersection and union of fuzzy set of clear sets is developed. The relations of inclusion for sets of levels of resulting type-2 fuzzy set are got. This relation allows to approximate the type-2 fuzzy set by a fuzzy set of ordinary nature (the type 1).

Статья поступила в редакцию 10.05.2012.